Caractérisation des développements de Taylor de λ-termes

Fanny He LMFI

Pierre Boudes et Michele Pagani

17 Septembre 2012

- Préliminaires
  - Le λ-calcul...
  - Evaluation/Réduction
  - Vers la problématique
- La problématique
  - Calcul avec ressources
  - Développement de Taylor d'un λ-terme
  - Théorème de Ehrhard-Régnier
- Une caractérisation pour les arbres de Böhm
  - Arbres de Böhm
  - Idéal
  - Un premier théorème
- Conclusions et futurs développements

Plan

Contexte

Introduction du λ-calcul

Par Alonzo Church (1930) :

- Fournit un cadre formel exprimant fonctions et calculs
- Définit et caractérise les fonctions récursives

Sert de base formelle pour :

- Des langages de programmation fonctionnelle
- Un métalangage pour preuves assistées par ordinateur

Syntaxe

Termes :

- x variable
- $\lambda x.M$ abstraction
- $(M)N$ application

Dans le terme $\lambda x.M$, λ est appelé le *lieur* de x.
Une variable non liée est dite *libre*.
Un terme *clos* est sans variable libre.

Exemples

- $T_1 = \lambda y \lambda x.(x)y = \lambda yx.(x)y$: x,y tous deux liés par des λ
- $T_2 = (\lambda x.(x)x)y$: x liée, y libre

Substitution, réduction

Mécanisme à la base du calcul des λ-termes :

Substitution et réduction en λ-calcul

- $T, M, T' ::= x \mid \lambda x.M \mid (M)N$
- Règle de β-réduction :

$$\frac{}{\underbrace{(\lambda x.M)N}_{\text{rédex}} \longrightarrow_\beta M\{N/x\}}$$

- On note $\twoheadrightarrow_\beta$ la clôture réflexive transitive de $\longrightarrow_\beta$.

Substitution, réduction

Exemple

- $\underline{2} = \lambda fx.(f)(f)x$
- $\underline{succ} = \lambda nfx.((n)f)(f)x$
- $(\underline{succ})\underline{2} \twoheadrightarrow_\beta \underline{3} = \lambda fx.(f)(f)(f)x.$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(\lambda nfx.((n)f)(f)x)\ \lambda fx.(f)(f)x} &\longrightarrow_\beta \lambda fx.\ (\underbrace{(\lambda fx.(f)(f)x)f})\ (f)x \\
&\longrightarrow_\beta \lambda fx.\ \underbrace{(\lambda x.(f)(f)x)(f)x} \\
&\longrightarrow_\beta \lambda fx.(f)(f)(f)x
\end{aligned}
$$

Réduction de tête, forme normale

Un terme est en forme normale si aucune réduction n'est possible.

Contre-exemple

$\omega = (\lambda x.(x)x)\lambda x.(x)x$

Réduction de tête : $\lambda\vec{x}.\ \underbrace{(\lambda x.M)N}_{\text{redex de tête}}\ \vec{P}$

Exemple

$$Y = \lambda f.\underbrace{(\lambda x.(f)(x)x)\lambda x.(f)(x)x}\ \to_\beta$$

$$\lambda f.(f)\underbrace{(\lambda x.(f)(x)x)\lambda x.(f)(x)x}\ \to_\beta \ldots$$

λ-calcul avec ressources

Introduit pour décomposer l'évaluation de λ-termes, décrivant ainsi la consommation de ressources :

Termes du calcul avec ressources

- $\Delta = s,\ t ::= x \mid \lambda x.s \mid s[t_1, \ldots, t_k]$
- Réduction : $\underbrace{(\lambda x.s)\ [t_1, ..., t_k]}_{\textbf{rédex}}$

  chaque t_i remplace un seul x via réduction linéaire de tête

Développement de Taylor

But : étudier le comportement quantitatif d'un programme

Développement de Taylor (Ehrhard-Régnier) :

λ-terme : $\longrightarrow$ ensemble de termes avec ressources :
$(\lambda x.T)\, U \longrightarrow \{(\lambda x.t)\,[u^n] \mid n \in \mathbb{N}\}$

Question :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble de termes avec ressources. Quand peut-on trouver un λ-terme T tel que $\mathbb{E}$ converge vers T ?

On veut caractériser les ensembles de termes avec ressources qui sont exactement le développement de Taylor de λ-termes.

Plan

λ-calcul avec ressources

Termes du calcul avec ressources $\Delta^{(!)}$

Par induction :

- Termes simples :

$$\Delta = s,\ t ::= x \mid \lambda x.s \mid s[t_1, \ldots, t_k]$$

- Poly-termes simples :

$$\begin{aligned} \Delta^! = S,\ T ::= &\ 1 \\ &\ [s] \\ &\ TS = [t_1, \ldots, t_k][s_1, \ldots, s_l] = [t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_l] \end{aligned}$$

Réduction

Exemple

- $2_r = \lambda fx.f[f[x]]$
- $succ_{2_r} = \lambda nfx.(n[f,f])[f[x]] = \lambda nfx.(n[f^2])[f[x]]$
- $succ_{2_r}[2_r] \twoheadrightarrow_r 3_r = \lambda fx.f[f[f[x]]]$.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(\lambda nfx.(n[f,f])[f[x]])\ [\lambda fx.f[f[x]]]} &\to_r \lambda fx.\ (\underbrace{(\lambda fx.f[f[x]])[f,f]})\ [f[x]] \\
&\to_r \lambda fx.\ \underbrace{(\lambda x.f[f[x]])\ [f[x]]} \\
&\to_r \lambda fx.f[f[f[x]]]
\end{aligned}
$$

Réduction

Avec ressources

- Règle de réduction : Soit $r = \underbrace{(\lambda x.s)\,[s_1,\ldots,s_k]}_{\textbf{rédex}}$.
  - Si $k \neq \#OL_s(x)$, alors $r \longrightarrow_r \emptyset$.
  - Sinon, $r \longrightarrow_r \{s \ll s_1/x_{f(1)}, ..., s_k/x_{f(k)} \gg \mid f \in \sigma_k\}$ où $\{x_1,\ldots,x_k\} = OL_s(x)$.
- Fermeture réflexive transitive : $\twoheadrightarrow_r \subseteq \mathcal{P}(\Delta^{(!)}) \times \mathcal{P}(\Delta^{(!)})$.

Forme normale dans $\Delta^{(!)}$

λ-calcul : souvent, les termes n'ont pas de forme normale.

Forte normalisation dans le calcul avec ressources

La procédure de réduction de tout terme dans $\Delta^{(!)}$ (vers une forme normale unique) est toujours finie.

Fonction forme normale

On peut introduire une fonction $NF : \mathcal{P}(\Delta^{(!)}) \longrightarrow \mathcal{P}(\Delta^{(!)})$ qui associe à un terme sa forme normale.

Exemple

$NF(\{(\lambda x.x[x^2])\,[(\lambda x.x[x])^3]\}) =$
$NF(\{(\lambda x.x[x])\,[\lambda x.x[x], \lambda x.x[x]]\}) = NF(\{(\lambda x.x[x])\,[\lambda x.x[x]]\}) = \emptyset.$

Développement de Taylor d'un λ-terme

Règles

Soit T un λ-terme ($T \in \Lambda$). Le développement de Taylor de T, $\tau(T)$, $\tau : \Lambda \longrightarrow \mathcal{P}(\Delta)$ est :

- Si $T = x$, $\tau(T) = \{x\}$;
- Si $T = \lambda x.U$, $\tau(T) = \{\lambda x.u \mid u \in \tau(U)\}$;
- Si $T = (U)V$,

$$\tau(T) = \{u\,\mathcal{V} = u[v_1, \ldots, v_k] \mid u \in \tau(U); k \in \mathbb{N}; v_1, \ldots, v_k \in \tau(V)\}$$

Développement de Taylor : Exemples

$$\begin{aligned}\tau(\underline{2}) &= \tau(\lambda fx.(f)(f)x)\\ &= \{\lambda fx.f[f[x^{l_1}],\ldots,f[x^{l_m}]] \mid m \in \mathbb{N}; l_1,\ldots,l_k \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(\underline{succ}) &= \tau(\lambda nfx.((n)f)(f)x)\\ &= \{\lambda nfx.(n[f^k])[f[x^{l_1}],\ldots,f[x^{l_m}]] \mid k,m,l_1,\ldots,l_m \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Ce que l'on veut caractériser

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de termes avec ressources. On veut savoir à quelles conditions $\mathcal{E}$ provient d'un λ-terme.

Caractérisation

Précisément, on veut connaître les ensembles $\mathcal{E}$ de termes sous forme normale tels qu'il existe $M \in \Lambda$ tel que

$$\mathcal{E} = NF(\tau(M))$$

Ce que l'on veut caractériser

Exemples

- $\emptyset$ provient de $\omega = (\lambda x.(x)x)\ \lambda x.(x)x$.
- $\{\lambda nfx.(n[f^k])[f[x^{l_1}], \ldots, f[x^{l_m}]] \mid k, m, l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{N}\}$ provient de $\underline{succ}$.
- $\{x_1\ 1, x_1[x_2\ 1], x_1[x_2[x_3\ 1]], \ldots\}$, $\{x, y\}$ ne proviennent d'aucun λ-terme.

Théorème de Ehrhard-Régnier

Vers la caractérisation : les arbres de Böhm (BT)

Théorème

Soit $M \in \Lambda$. Alors :

$$\tau(BT(M)) = NF(\tau(M))$$

Pourquoi étudier les arbres de Böhm ?

- $\tau(M)$: raffinement quantitatif de $BT(M)$
- Il existe une caractérisation due à Barendregt des BT (en tant qu'arbres) provenant de λ-termes
- On cherche une caractérisation des BT en tant qu'ensembles

Plan

Arbres élémentaires

Arbres élémentaires (EBT)

$$\text{EBT} : b,\ c ::= \Omega \mid \lambda x_0 \dots x_{n-1}.(y) b_0 \dots b_{k-1}$$

Munis d'une relation d'ordre $\sqsubseteq$ définie par induction :

- $\Omega \sqsubseteq b \qquad \forall b \in \text{EBT}$
- $\lambda x_0 \dots x_{n-1}.(y) b_0 \dots b_{k-1} \sqsubseteq c$
  si $c = \lambda x_0 \dots x_{n-1}.(y) c_0 \dots c_{k-1}$ et $b_j \sqsubseteq c_j\ \forall j$.

Arbres de Böhm

Arbres de Böhm

Soit $M \in \Lambda$. On définit par induction sur n, $BT_n(M) \in EBT$:

- $BT_0(M) = \Omega$;
- $BT_{n+1}(\lambda x_0 \ldots x_{p-1}.(y)M_0 \ldots M_{l-1}) =$
  $\lambda x_0 \ldots x_{p-1}.(y)BT_n(M_0) \ldots BT_n(M_{l-1})$;
- $BT_{n+1}(\lambda x_0 \ldots x_{p-1}.((\lambda y.Q)R)M_0 \ldots M_{l-1}) =$
  $BT_n(\lambda x_0 \ldots x_{p-1}.(Q\{R/y\})M_0 \ldots M_{l-1})$.

Finalement,

$$BT(M) = \Downarrow \{BT_n(M), n \in \mathbb{N}\} \subseteq EBT$$

.

Exemple

$$Y' = (Y_0)Y_0 = (\lambda x.(f)(x)x)\lambda x.(f)(x)x$$

- $BT_0(Y') = \Omega = BT_1(Y)$
- $BT_2(Y') = (f)\Omega$
- $BT_3(Y') = (f)(f)\Omega$ etc...
- $BT(Y') = \{\Omega, (f)\Omega, (f)(f)\Omega, (f)(f)(f)\Omega \dots\}$

Théorèmes de caractérisation

Théorème (Barendregt) :

$\forall \mathcal{B}$ BT :
$\exists T$ λ-terme tel que $BT(T) = \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ r.e. et $FV(\mathcal{B})$ fini.

Théorème :

$\forall \mathcal{B}$ ensemble d'EBTs :
$\exists T$ λ-terme tel que $BT(T) = \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ r.e., $FV(\mathcal{B})$ fini et $\mathcal{B}$ $\sqsubseteq$-idéal.

Idéal d'EBTs

Dans notre cas les deux critères de Barendregt sont insuffisants.

Idéal

$\mathcal{B} \subseteq EBT$ est un idéal si :

- $\Omega \in \mathcal{B}$;
- si pour tout $c \in \mathcal{B}$, $b \sqsubseteq c$ implique $b \in \mathcal{B}$;
- si $b, b' \in \mathcal{B}$, alors il existe $c \in \mathcal{B}$ tel que $b, b' \sqsubseteq c$.

Un premier théorème

Théorème :

$\forall \mathcal{B}$ ensemble d'EBTs :
$\exists T$ λ-terme tel que $BT(T) = \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ r.e., $FV(\mathcal{B})$ fini et $\mathcal{B}$ $\sqsubseteq$-idéal.

$\Rightarrow$: se vérifie facilement.
$\Leftarrow$: reprendre le théorème de Barendregt et adapter au cadre ensembliste.

Exemple

Soit $b = \lambda y.(y)(y)x$

Son BT est $\mathcal{B} = \{\Omega, \lambda y.(y)\Omega, \;\; \lambda y.(y)(y)\Omega, \;\; \lambda y.(y)(y)x\}$

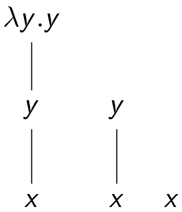

Figure: L'arbre de $\mathcal{B}$, $\{\Omega, (y)\Omega, (y)x\}$ et $\{\Omega, x\}$

Plan

Conclusion

- Notion d'idéal insuffisante : ordre sur $\{y1, y[x], y[x,x], y[x,x,x]\ldots\}$?
  pour décrire le développement de Taylor on utilise une relation de *cohérence*
- A montrer : caractérisation du développement de Taylor de λ-termes